

**ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ**

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА**

**ҚАЗАҚСТАН ҒЫЛЫМЫ
МЕН ТЕХНИКАСЫ**

2001 ЖЫЛДАН БАСТАП ШЫҒАДЫ



**НАУКА И ТЕХНИКА
КАЗАХСТАНА**

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ISSN 1680-9165

№ 4 (2020)

ПАВЛОДАР

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТ**
выходит 1 раз в квартал

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ63VPY00028965

выдано
Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность

публикация результатов фундаментальных и прикладных научных исследований
по широкому спектру проблем в области металлургии, машиностроения, транспорта,
строительства и естественных наук

Подписной индекс – 76129

Импакт-фактор РИНЦ – 0,344

Абишев Кайратолла Кайроллинович – к.т.н., профессор (главный редактор);
Касенов Асылбек Жумабекович – к.т.н., профессор (заместитель главного редактора);
Мусина Жанара Керейовна – к.т.н., профессор (ответственный секретарь);
Шокубаева Зауреш Жанатовна – технический редактор.

Члены редакционной коллегии:

Гумаров Гали Сагингалиевич – д.т.н., профессор (Уральск, Казахстан);
Калиакпаров Алтай Гиндуллинович – д.т.н., профессор (Нур-Султан, Казахстан);
Клецель Марк Яковлевич – д.т.н., профессор (Павлодар, Казахстан);
Украинец Виталий Николаевич – д.т.н., профессор (Павлодар, Казахстан);
Шеров Карибек Тагаевич – д.т.н., профессор (Караганда, Казахстан);
Богомоллов Алексей Витальевич - к.т.н., ассоц. профессор (Павлодар, Казахстан);
Жажибаева Галия Тулеуевна - к.т.н., профессор (Павлодар, Казахстан);

Зарубежные члены редакционной коллегии:

Baigang Sun – профессор (Пекин, Китай);
Gabriele Comodi – PhD, профессор (Анкона, Италия);
Jianhui Zhao – профессор (Харбин, Китай);
Khamid Mahkamov – д.т.н., профессор (Ньюкасл, Великобритания);
Magin Lapuerta – д.т.н., профессор (СьюДад Исаева КуралайСметкановна Реал, Испания);
Mareks Mezitis – д.т.н., профессор (Рига, Латвия);
Petr Bouchner – PhD, профессор (Прага, Чехия);
Ronny Berndtsson – профессор (Лунд, Швеция);
Барзов Александр Александрович – д.т.н., профессор (Москва, Россия);
Бочкарев Петр Юрьевич – д.т.н., профессор (Саратов, Россия);
Витвицкий Евгений Евгеньевич – д.т.н., профессор (Омск, Россия);
Иванчина Эмилия Дмитриевна – д.т.н., профессор (Томск, Россия);
Лазарев Владислав Евгеньевич – д.т.н., профессор (Челябинск, Россия);
Мягков, Леонид Львович – д.т.н., профессор (Москва, Россия);
Чайкин Владимир Андреевич – д.т.н., профессор (Магнитогорск, Россия);
Янюшкин Александр Сергеевич – д.т.н., профессор (Чебоксары, Россия);
Ребезов Максим Борисович – д.с/х.н., профессор (Москва, Россия).

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели
Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов
При использовании материалов журнала ссылка на журнал «Наука и техника Казахстана» обязательна

Thus, the issues of ensuring a high level of reliability of the railway track and long-term stability of its foundation are relevant. The article discusses the issues of calculating the stability and strength of the roadbed.

Keywords: railway transport, railway track, roadbed, increased loads, load capacity, stability, strength.

ГРНТИ 30.19.15

<https://doi.org/10.48081/TWLR9106>

М. И. Котова¹, В. Н. Украинец², Е. М. Ибраева³

¹Институт математики и математического моделирования,
Республика Казахстан, г. Алматы;

^{2,3}Торайгыров университет,
Республика Казахстан, г. Павлодар

РЕАКЦИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА НА ДВИЖУЩУЮСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

Исследуется модельная для тоннеля мелкого заложения задача о действии на упругое полупространство периодической нагрузки, равномерно движущейся по поверхности круговой цилиндрической полости с различными дозвуковыми скоростями. Движение полупространства описывается динамическими уравнениями теории упругости в подвижной системе координат, для решения которых предложен метод неполного разделения переменных. Показано, что во избежание обрушения кровли тоннеля мелкого заложения, а также воздействия поверхностных Рэлеевских волн на наземные строительные сооружения и возможности возникновения в последних резонансных колебаний, скоростной режим транспортируемых по тоннелю объектов должен быть ниже Рэлеевской скорости.

Ключевые слова: упругое полупространство, реакция упругого полупространства, цилиндрическая полость, периодическая нагрузка, напряженно-деформированное состояние, Рэлеевские волны, тоннель мелкого заложения, модельная задача.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем проектирования транспортных тоннелей – определение безопасного диапазона скоростей движущихся объектов, при котором возникающая вследствие этого движения вибрация окружающего тоннель породного массива не оказывала бы неблагоприятного воздействия на само подземное сооружение и расположенные вблизи наземные сооружения. Модельными для таких исследований являются задачи для упругого полупространства, ослабленного полостью [1–6].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Методы математического моделирования с привлечением моделей механики деформируемого твёрдого тела.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Данная статья рассмотрена, одобрена и рекомендована к изданию на заседании кафедры «Архитектура и дизайн» НАО «Торайгыров университет».

Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую полость радиусом R , расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве, отнесённому к подвижной декартовой $x, y, \eta = z - ct$ или цилиндрической системе координат $r, \theta, \eta = z - ct$ (рисунок 1). В декартовой системе координат ось z совпадает с осью полости, параллельной свободной от нагрузок плоской границе полупространства, а ось x перпендикулярна к этой границе ($x \leq h$).

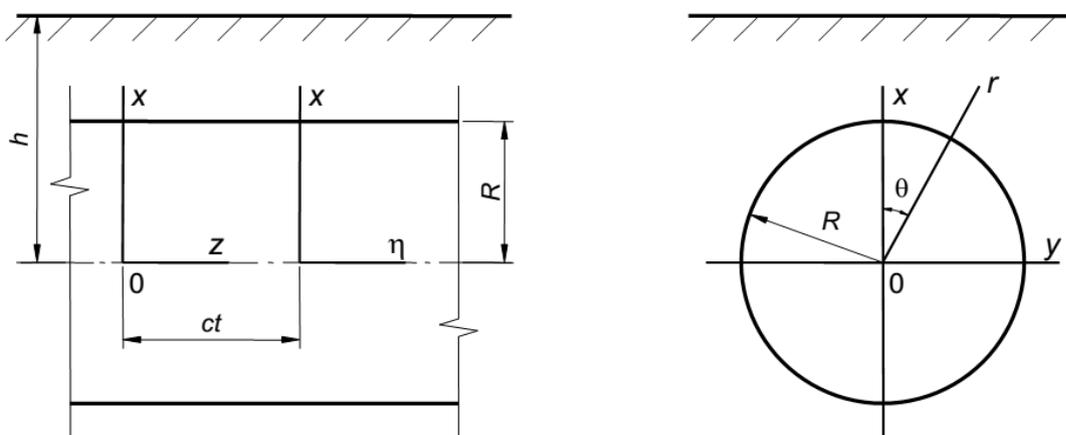


Рисунок 1 – Полость в упругом полупространстве

Пусть на поверхность полости действует движущаяся с постоянной скоростью s , меньшей, чем скорость распространения волн сдвига в среде (дозвуковой случай), в направлении оси z нагрузка интенсивностью $P(\theta, \eta)$, периодичная по h и представима в виде синусоидальной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$P(\theta, \eta) = p(\theta)e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \tag{1}$$

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta)e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta,$$

где $P_j(\theta, \eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки $P(\theta, \eta)$.

Граничные условия на поверхности полости, при этом, имеют вид

$$\sigma_{rj}|_{r=R} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta, \quad (2)$$

где σ_{rj} – компоненты тензора напряжений в среде.

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то, при $x = h$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \quad (3)$$

Определим реакцию полупространства на данную подвижную нагрузку.

Для этого воспользуемся уравнениями движения упругой среды в подвижной системе координат [1, 2]

$$(M_p^{-2} - M_s^{-2}) \text{grad div } \mathbf{u} + M_s^{-2} \nabla^2 \mathbf{u} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial \eta^2. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{u} – вектор смещения упругой среды, $M_p = c/c_p$, $M_s = c/c_s$ – числа Маха, $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в среде, $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, ∇^2 – оператор Лапласа.

Вектор \mathbf{u} можно выразить через потенциалы Ламе [7, 8]

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot}(\varphi_2 \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta), \quad (5)$$

которые, как следует из (4) и (5), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j^2 \partial^2 \varphi_j / \partial \eta^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где $M_1 = M_p$, $M_2 = M_3 = M_s$.

В установившемся состоянии зависимость всех величин от h имеет вид (1), поэтому $\varphi_j(r, \theta, \eta) = \Phi_j(r, \theta) e^{i\xi\eta}$. Подставляя последнее выражение в (6), получим

$$\nabla_2^2 \Phi_j - m_j^2 \xi^2 \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа, $m_j = (1 - M_j^2)^{1/2}$.

Выразив компоненты напряжённо-деформированного состояния (НДС) среды через потенциалы Ламе можно получить выражения для перемещений u_l и напряжений σ_{lm} от синусоидальной нагрузки в декартовой ($l = x, y, \eta$, $m = x, y, \eta$) и цилиндрической ($l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$) системах координат как функции от Φ_j .

В дозвуковом случае $M_s < 1$ ($m_2 = m_3 > 0$) и решения уравнений (7) можно представить через суперпозиции поверхностных цилиндрических $\Phi_j^{(1)}$ и плоских $\Phi_j^{(2)}$ волн [1, 2]

$$\Phi_j = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}, \tag{8}$$

$$\Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n K_n(k_j r) e^{in\theta}, \tag{9}$$

$$\Phi_j^{(2)} = \int_L g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) d\zeta. \tag{10}$$

Здесь $K_n(k_j r)$ – функции Макдональда, $k_j = |m_j \xi|$; $g_j(\xi, \zeta)$, a_{nj} – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Выбор контура L связан с особенностями функций $g_j(\xi, \zeta)$.

Слагаемые рядов Фурье-Бесселя в (9) – частные решения уравнений (7) – описывают излучаемые цилиндрической полостью и затухающие на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) волны, если

$$\text{Re} k_j > 0. \tag{11}$$

При действительных $\xi \neq 0$ $k_j = m_j |\xi| > 0$, и условия (11) выполнены.

Подынтегральные функции в (10), также удовлетворяющие уравнениям (7), описывают плоские гармонические волны, отражённые границей полупространства и затухающие при $x \rightarrow -\infty$, если

$$\text{Re} \sqrt{\zeta^2 + k_j^2} \geq 0, \quad \text{Im} \sqrt{\zeta^2 + k_j^2} \leq 0. \tag{12}$$

Условия на радикалы (12) – это условия излучения для отражённых от границы полупространства волн. Первое из них даёт затухание решений на бесконечности. Второе условие, в соответствии с физическими представлениями, показывает, что отражённые волны движутся от границы полупространства. Поэтому контур L в комплексной плоскости $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ следует выбрать таким образом, чтобы на нём выполнялись условия (12).

Допустим, что $L = (-\infty, \infty)$, то есть совпадает с действительной осью $\zeta_1 \equiv \zeta$. Тогда

$$\Phi_j^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) d\zeta. \tag{13}$$

В этом случае условия (12) выполнены, если фиксировать положительный знак радикала.

Пусть коэффициенты a_{nj} известны (что соответствует задаче об излучателе, движущемся вдоль оси z , потенциал которого задан в виде (9)). Выразим $g_j(x,z)$ через a_{nj} . Для этого разложим (9) на плоские волны. Воспользуемся представлением [1] для $M_j < 1$.

$$K_n(kr)e^{in\theta} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k^2}}{k} \right)^n \frac{\exp(iy\zeta - x\sqrt{\zeta^2 + k^2})}{\sqrt{\zeta^2 + k^2}} d\zeta, \quad (14)$$

$$\operatorname{Re}\sqrt{\zeta^2 + k^2} \geq 0, \quad \operatorname{Re}k \geq 0, \quad x > 0.$$

Подставляя (14) в (8), представим потенциалы в декартовой системе координат

$$\Phi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (15)$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}$, $\Phi_{nj} = \left(\frac{\zeta + f_j}{k_j} \right)^n$, $j = 1, 2, 3$.

Воспользуемся граничными условиями (3), с учётом (15). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнявая, в силу произвольности y , их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой определяем $g_i(\xi, \zeta)$

$$g_j(\xi, \zeta) = \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk} \Phi_{nk}. \quad (16)$$

Здесь $\Delta_* = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}$;

$$\Delta_{11}^* = \frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}} - \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}}, \quad \Delta_{12}^* = -2\zeta(2\rho_*^2 - \beta^2), \quad \Delta_{13}^* = 2\xi(2\rho_*^2 - \beta^2)\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2};$$

$$\Delta_{21}^* = -\frac{M_s^2}{m_s^2} \Delta_{12}^*, \quad \Delta_{22}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \quad \Delta_{23}^* = -4\xi\zeta \frac{M_s^2}{m_s^2} \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2};$$

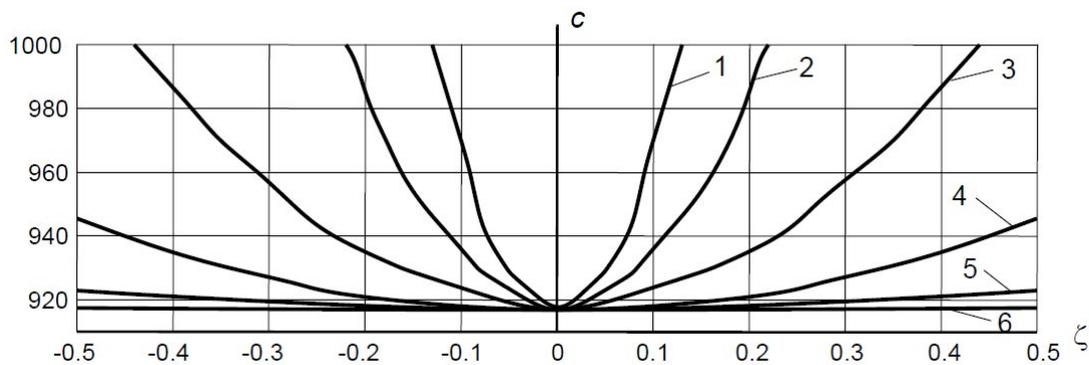
$$\Delta_{31}^* = -\frac{\Delta_{13}^*}{m_s^2 \xi^2}, \quad \Delta_{32}^* = \frac{\Delta_{21}^*}{\beta^2}, \quad \Delta_{33}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}} + \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}};$$

$$\alpha = M_p \xi; \quad \beta = M_s \xi; \quad \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2; \quad \Delta_{**} = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2};$$

$$\rho_{**}^2 = \xi^2 + (2/m_s^2 - 1)\zeta^2.$$

Заметим, что $\Delta^*(\rho_*)$ – определитель Рэлея, который обращается в ноль при $\rho_{*R}^2 = \xi^2 M_R^2$, или в двух точках $\pm \zeta_R = \pm |\xi| \sqrt{M_R^2 - 1}$, где $M_R = c/c_R$ – число Маха, c_R – скорость поверхностной волны Рэлея, которую условимся называть рэлеевской скоростью. Из последнего следует, что $\Delta^*(\rho_*)$ не обращается в ноль на действительной оси, если $M_R < 1$, или $c < c_R$, то есть при дорэлеевских скоростях движения нагрузки. В этом случае в качестве контура интегрирования L в (10) можно сохранить ось ζ_1 , так как все подынтегральные функции непрерывны и достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности, что можно показать, используя свойство ограниченности носителя бегущей граничной нагрузки. Поэтому интегралы (13) существуют и удовлетворяют условиям затухания на бесконечности. То есть решение в этом случае построено. Следует отметить, что Рэлеевская скорость c_R несколько ниже скорости волн сдвига в среде [9].

На рисунке 2 изображены графики $c(\zeta)$, соответствующие уравнению $D^*(r^*) = 0$ для разных значений ξ ($\xi = 0,3; 0,5; 1,0; 2,0; 4,0; 16,0$). Расчёты проведены для алевролита: $\nu = 0,2$, $\mu = 2,532 \times 10^9$ Па, $\rho = 2,5 \times 10^3$ кг/м³, $c_p = 1643,4$ м/с, $c_s = 1006,4$ м/с, $c_R = 917$ м/с.



Обозначения кривых: $\xi=0,3$ (1); $\xi=0,5$ (2); $\xi=1,0$ (3); $\xi=2,0$ (4); $\xi=4,0$ (5); $\xi=16,0$ (6).

Рисунок 2 – графики $c(\zeta)$, соответствующие уравнению $\Delta^*(\rho_*) = 0$ для разных значений ξ ($\xi = 0,3; 0,5; 1,0; 2,0; 4,0; 16,0$)

Из рисунка видно, что все кривые имеют одинаковый минимум $c = c_R = 917$ м/с при $\zeta = 0$ и любых $\xi \neq 0$. Причём, с возрастанием ξ кривые стремятся занять положение прямой $c = c_R$, то есть при $\xi \rightarrow \infty \Delta_*(\rho_*) = 0$ для любых ζ , если $c = c_R$. Действительно, корень уравнения $\Delta_*(\rho_*) = 0 \quad c = |\rho_*|c_R/|\xi|$ в пределе при $\xi \rightarrow \infty$ равен c_R .

При сверхрэлеевских скоростях движения нагрузки $c_R < c < c_s$ ($M_R > 1$) для фиксированных значений c и $\xi \Delta_*(\rho_*) = 0$ в точках $\pm \zeta_R$ действительной оси ζ_1 , где подынтегральные функции в (10) имеют полюса первого порядка, то есть неинтегрируемые особенности. Поэтому интегралы (10) не существуют в обычном смысле. Однако, деформируя контур интегрирования L с обходом особенностей в точках $\pm \zeta_R$ по ϵ -полуокружностям в областях, где выполняются условия излучения (12) и устремляя ϵ к нулю, можно получить решение и в этом случае:

$$\Phi_j = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk} \Phi_{nk} \right] e^{iy\zeta} d\zeta -$$

$$- i\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 a_{nk} \left\{ \frac{e^{(x-h)f_j - iy\zeta_R}}{\Delta_{\zeta}^*} \Delta_{jk}^* e^{-hf_k} \Phi_{nk} \Big|_{\zeta=-\zeta_R} - \frac{e^{(x-h)f_j + iy\zeta_R}}{\Delta_{\zeta}^*} \Delta_{jk}^* e^{-hf_k} \Phi_{nk} \Big|_{\zeta=\zeta_R} \right\}$$

Здесь в формуле во второй строке стоят вычеты подынтегральных функций в указанных точках, $\Delta_{\zeta}^* = \frac{\partial \Delta_*(\xi, \zeta)}{\partial \zeta}$. Используя асимптотические свойства интеграла в смысле главного значения, из этой формулы следует, что при $y \rightarrow \pm\infty$

$$\Phi_j \approx 2\pi i \operatorname{sgn} y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 a_{nk} \frac{e^{(x-h)f_j \mp iy\zeta_R}}{\Delta_{\zeta}^*} \Delta_{jk}^* e^{-hf_k} \Phi_{nk} \Big|_{\zeta=\mp\zeta_R}.$$

С учетом множителя $\exp(i\xi\eta)$ отсюда следует, что при сверхрэлеевских скоростях движения нагрузки на свободной поверхности полупространства $x = h$ возникают рэлеевские волны, распространяющиеся в полуплоскости ($y > 0, \eta$) в направлении волнового вектора (ζ_R, ξ) , а в полуплоскости ($y < 0, \eta$) – в направлении $(-\zeta_R, \xi)$.

При $c = c_R$ подынтегральные функции в (10) имеют сильные, неинтегрируемые даже в смысле главного значения особенности. Стационарного решения задачи в этом случае не существует (амплитуды вынужденных волн неограниченно возрастают).

Для дорэлеевской скорости движения нагрузки выражения (15), с учетом (16), перепишутся в виде

$$\Phi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk} \Phi_{nk} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (17)$$

С учетом (17) формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния полупространства в декартовых координатах можно представить в виде

$$u_l = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left(T_{lj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + T_{lj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta, \tag{18}$$

$$\frac{\sigma_{lm}}{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left(S_{lmj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + S_{lmj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta.$$

Здесь: $l = x, y, \eta, \quad m = x, y, \eta$;

$$F_{nj}^{(1)} = \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_{nj} \Phi_{nj}, \quad F_{nj}^{(2)} = e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} e^{-hf_k} \sum_n a_{nk} \Phi_{nk};$$

$$T_{x1}^{(1)} = -T_{x1}^{(2)} = -f_1, \quad T_{x2}^{(1)} = T_{x2}^{(2)} = -\zeta, \quad T_{x3}^{(1)} = -T_{x3}^{(2)} = f_3 \xi;$$

$$T_{y1}^{(1)} = T_{y1}^{(2)} = i\zeta, \quad T_{y2}^{(1)} = -T_{y2}^{(2)} = if_2, \quad T_{y3}^{(1)} = T_{y3}^{(2)} = -i\xi\zeta;$$

$$T_{\eta 1}^{(1)} = T_{\eta 1}^{(2)} = i\xi, \quad T_{\eta 2}^{(1)} = T_{\eta 2}^{(2)} = 0, \quad T_{\eta 3}^{(1)} = T_{\eta 3}^{(2)} = -im_s^2 \xi^2;$$

$$S_{xx1}^{(1)} = S_{xx1}^{(2)} = n_2 + 2(f_1^2 - \xi^2 m_p^2), \quad S_{xx2}^{(1)} = -S_{xx2}^{(2)} = 2\zeta f_2, \quad S_{xx3}^{(1)} = S_{xx3}^{(2)} = -2f_3^2 \xi;$$

$$S_{yy1}^{(1)} = S_{yy1}^{(2)} = n_2 - 2(\zeta^2 + \xi^2 m_p^2), \quad S_{yy2}^{(1)} = -S_{yy2}^{(2)} = -2f_2 \zeta, \quad S_{yy3}^{(1)} = S_{yy3}^{(2)} = 2\xi\zeta^2;$$

$$S_{\eta\eta 1}^{(1)} = S_{\eta\eta 1}^{(2)} = n_2 - 2n_1, \quad S_{\eta\eta 2}^{(1)} = S_{\eta\eta 2}^{(2)} = 0, \quad S_{\eta\eta 3}^{(1)} = S_{\eta\eta 3}^{(2)} = 2m_s^2 \xi^3;$$

$$S_{xy1}^{(1)} = -S_{xy1}^{(2)} = -2f_1 \zeta i, \quad S_{xy2}^{(1)} = S_{xy2}^{(2)} = -(f_2^2 + \zeta^2) i, \quad S_{xy3}^{(1)} = -S_{xy3}^{(2)} = 2f_3 \xi \zeta i;$$

$$S_{\eta y 1}^{(1)} = S_{\eta y 1}^{(2)} = -2\xi \zeta, \quad S_{\eta y 2}^{(1)} = -S_{\eta y 2}^{(2)} = -\xi f_2, \quad S_{\eta y 3}^{(1)} = S_{\eta y 3}^{(2)} = n_2 \zeta;$$

$$S_{x\eta 1}^{(1)} = -S_{x\eta 1}^{(2)} = -2f_1 \xi i, \quad S_{x\eta 2}^{(1)} = S_{x\eta 2}^{(2)} = -\xi \zeta i, \quad S_{x\eta 3}^{(1)} = -S_{x\eta 3}^{(2)} = n_2 f_3 i;$$

$$n_1 = (1 + m_p^2) \xi^2, \quad n_2 = (1 + m_s^2) \xi^2.$$

Представим Φ_j (8) в цилиндрической системе координат при $c < c_R$.

Используя идею аналитического продолжения из разложения [10] $e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta}$, можно найти представление для поверхностной волны [1]

$$\exp(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k^2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(kr) e^{in\theta} \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k^2}}{k} \right)^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k^2}}.$$

Тогда в цилиндрической системе координат для $x < h$ получим

$$\Phi_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_j r) + I_n(k_j r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} e^{-h f_j} d\zeta \right) e^{in\theta}.$$

Подставляя в последнее выражение из (16) $g_j(\xi, \zeta)$, находим

$$\Phi_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_j r) + b_{nj} I_n(k_j r)) e^{in\theta}, \quad (19)$$

где $b_{nj} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{mk} A_{nj}^{mk}$, $A_{nj}^{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} \Phi_{mk} \Phi_{nj} e^{-h(f_k + f_j)} d\zeta$.

С учетом (19) формулы для вычислений компонент НДС полупространства в цилиндрических координатах можно представить в виде

$$u_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [T_{lj}^{(1)}(K_n(k_j r)) a_{nj} + T_{lj}^{(2)}(I_n(k_j r)) b_{nj}] e^{i(\xi\eta + n\theta)}, \quad (20)$$

$$\frac{\sigma_{lm}}{\mu} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [S_{lmj}^{(1)}(K_n(k_j r)) a_{nj} + S_{lmj}^{(2)}(I_n(k_j r)) b_{nj}] e^{i(\xi\eta + n\theta)}.$$

Здесь $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$;

$$T_{r1}^{(1)} = k_1 K_n'(k_1 r), \quad T_{r2}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n(k_2 r), \quad T_{r3}^{(1)} = -\xi k_3 K_n'(k_3 r);$$

$$T_{\theta 1}^{(1)} = \frac{n}{r} K_n(k_1 r) \cdot i, \quad T_{\theta 2}^{(1)} = -k_2 K_n'(k_2 r) \cdot i, \quad T_{\theta 3}^{(1)} = -\frac{n}{r} \xi K_n(k_3 r) \cdot i;$$

$$T_{\eta 1}^{(1)} = \xi K_n(k_1 r) \cdot i, \quad T_{\eta 2}^{(1)} = 0, \quad T_{\eta 3}^{(1)} = -k_3^2 K_n(k_3 r) \cdot i;$$

$$S_{rr1}^{(1)} = 2 \left(k_1^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda M_p^2 \xi^2}{2\mu} \right) K_n(k_1 r) - \frac{2k_1 K_n'(k_1 r)}{r};$$

$$\begin{aligned}
 S_{rr2}^{(1)} &= \frac{2n}{r^2} K_n(k_2 r) - \frac{2k_2 K_n'(k_2 r)}{r}; \\
 S_{rr3}^{(1)} &= -2\xi \left(k_3^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_3 r) + \frac{2\xi k_3 K_n'(k_3 r)}{r}; \\
 S_{\theta\theta 1}^{(1)} &= -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda M_p^2 \xi^2}{2\mu} \right) K_n(k_1 r) + \frac{2k_1 K_n'(k_1 r)}{r}; \\
 S_{\theta\theta 2}^{(1)} &= -\frac{2n K_n(k_2 r)}{r^2} + \frac{2nk_2 K_n'(k_2 r)}{r}; \\
 S_{\theta\theta 3}^{(1)} &= \frac{2\xi n^2 K_n(k_3 r)}{r^2} - \frac{2\xi k_3 K_n'(k_3 r)}{r}; \\
 S_{\eta\eta 1}^{(1)} &= -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda M_p^2}{2\mu} \right) K_n(k_1 r), \quad S_{\eta\eta 2}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta 3}^{(1)} = 2m_3^2 \xi^3 K_n(k_3 r); \\
 S_{r\theta 1}^{(1)} &= \left(-\frac{2n K_n(k_1 r)}{r^2} + \frac{2nk_1 K_n'(k_1 r)}{r} \right) \cdot i; \\
 S_{r\theta 2}^{(1)} &= \left(-\left(k_2^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_2 r) + \frac{2k_2 K_n'(k_2 r)}{r} \right) \cdot i; \\
 S_{r\theta 3}^{(1)} &= \left(\frac{2n\xi K_n(k_3 r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_3 K_n'(k_3 r)}{r} \right) \cdot i; \\
 S_{\theta\eta 1}^{(1)} &= -\frac{2n\xi K_n(k_1 r)}{r}, \quad S_{\theta\eta 2}^{(1)} = \xi k_2 K_n'(k_2 r), \quad S_{\theta\eta 3}^{(1)} = \frac{n\xi^2 (1 + m_3^2) K_n(k_3 r)}{r}; \\
 S_{r\eta 1}^{(1)} &= 2\xi k_1 K_n'(k_1 r) \cdot i, \quad S_{r\eta 2}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_2 r) \cdot i}{r}, \quad S_{r\eta 3}^{(1)} = -\xi^2 k_3 (1 + m_3^2) K_n'(k_3 r) \cdot i; \\
 K_n'(kr) &= \frac{dK_n(kr)}{d(kr)}.
 \end{aligned}$$

$T_{lj}^{(2)}$, $S_{lmj}^{(2)}$ получаются из $T_{lj}^{(1)}$, $S_{lmj}^{(1)}$ заменой $K_n(k_j r)$ на $I_n(k_j r)$.

Для определения коэффициентов a_{nj} воспользуемся граничными условиями (2), с учётом (1), (20). Приравнявая коэффициенты рядов Фурье при ϵ_{in} , получим

бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с определителем нормального типа

$$\mu \sum_{j=1}^3 [S_{rmj}^{(1)}(K_n(k_j R)) a_{nj} + S_{rmj}^{(2)}(I_n(k_j R)) b_{nj}] = P_{nm}, \quad (21)$$

$$m = r, \theta, \eta; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При численной реализации задачи, для решения системы уравнений (21) удобно пользоваться методом последовательных отражений. Для этого представим Φ_j в виде $\Phi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_j^{(k)}$, где $\Phi_j^{(2k)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}^{(2k)} K_n(k_j R) e^{in\theta}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

назовём потенциалами волн, излучаемых полостью, а $\Phi_j^{(2k+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}^{(2k+1)} I_n(k_j R) e^{in\theta}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – потенциалами волн, отражённых границей полупространства.

С учётом этого граничные условия (21) можно представить в виде бесконечной системы уравнений блочно-диагонального типа с матрицами (3'3) вдоль главной диагонали

$$\sum_{j=1}^3 S_{rmj}^{(1)}(K_n(k_j R)) a_{nj}^{(2k)} = \begin{cases} P_{nm}/\mu, & \text{при } k = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{rmj}^{(2)}(I_n(k_j R)) a_{nj}^{(2k-1)}, & \text{при } k \neq 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$m = r, \theta, \eta; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Коэффициенты $a_{nj}^{(2k-1)}$ определяются соотношением $a_{nj}^{(2k-1)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml}^{2(k-1)} A_{nj}^{ml}$.
Окончательно, получим: $a_{nj} = a_{nj}^{(0)} + a_{nj}^{(2)} + a_{nj}^{(4)} + \dots$

Проведенные в [1] исследования определителя системы уравнений (22) показали, что при дорэлеевских скоростях движения нагрузки ($c < c_R$) он не обращается в ноль для любых $\xi \neq 0$ (в этом случае система (22) имеет единственное решение). Корни определителя появляются лишь при $c \geq c_R$ (в этом случае происходят резонансные явления).

В случае произвольной периодической по h нагрузки, разлагая ее в ряд Фурье, для каждой составляющей ряда получим вышерассмотренную задачу.

ВЫВОДЫ

Поскольку рассматриваемая задача является модельной для тоннеля мелкого заложения, то из вышеизложенного следует, что во избежание обрушения его кровли, а также воздействия поверхностных Рэлеевских волн на наземные строительные сооружения и возможности возникновения в последних резонансных

колебаний, скоростной режим транспортируемых по тоннелю объектов должен быть ниже Рэлеевской скорости c_R .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 **Ержанов, Ж. С., Айтиалиев, Ш. М., Алексеева, Л. А.** Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата : Наука, 1989. – 240 с.
- 2 **Ukrainets, V. N.** Earth surface response to a load moving in a tunnel. // *Mechanics of Solids*. (Allerton Press, Inc., New York). – 2009. – V. 44. – № 2. – P. 251–256.
- 3 **İrfan Coşkun and Demirhan Dolmaseven.** Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space, *Journal of Engineering*, vol. 2017, Article ID 6145375, 12 pages, 2017. [Электронный ресурс]. – <https://doi.org/10.1155/2017/6145375>.
- 4 **Cao, Z., Sun, S., Yuan, Z., Cai, Y.** Analytical Study on the Effect of Moving Surface Load on Underground Tunnel. In: Wu W., Yu HS. (eds) *Proceedings of China-Europe Conference on Geotechnical Engineering*. Springer Series in Geomechanics and Geoengineering. Springer, Cham. 2018.
- 5 **Dwivedia, J. P., Singha, V. P. Radha Krishna Lalb, Sakshi Devia.** Dynamic Response of Lined Circular Tunnel in Linear Viscoelastic Medium Due to Moving Ring load. - *Materials Today: Proceedings Volume 4, Issue 2, Part A*, 2017, Pages 3767-3775.
- 6 **Shunhua Zhou.** Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems. – Academic Press, 2019. – 276 p.
- 7 **Новацкий, В.** Теория упругости. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
- 8 **Гузь, Л. И., Кубенко, В. Д., Черевко, М. А.** Дифракция упругих волн. – Киев : Наукова думка, 1978. – 308 с.
- 9 **Тимошенко, С. П., Гудьер, Дж.** Теория упругости. – М. : Наука, 1979. – 560 с.
- 10 **Иванов, Е. А.** Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.

REFERENCES

- 1 **Erzhanov, Zh. S., Ajtaliev, Sh. M., Alekseeva, L. A.** Dinamika tonnelej i podzemny`x truboprovodov. [Yerzhanov Zh. S., Aitaliev Sh. M., Alekseeva L. A. Dynamics of tunnels and underground pipelines] – Alma-Ata : Nauka, 1989. – 240 p.
- 2 **Ukrainets, V. N.** Earth surface response to a load moving in a tunnel.[Ukrainets V.N. earth surface response to a load moving in a tunnel.] // *Mechanics of Solids*. (Allerton Press, Inc., New York). – 2009. – V. 44. – № 2. – P. 251–256.
- 3 **İrfan Coşkun and Demirhan Dolmaseven.** Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space [İrfan Coşkun and Demirhan Dolmaseven. Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space], *Journal of Engineering*, vol. 2017, Article ID 6145375, 12 pages, 2017. <https://doi.org/10.1155/2017/6145375>.
- 4 **Cao, Z., Sun, S., Yuan, Z., Cai, Y.** Analytical Study on the Effect of Moving Surface Load on Underground Tunnel. [Cao Z., Sun S., Yuan Z., Cai Y. Analytical Study

on the Effect of Moving Surface Load on Underground Tunnel.] In: Wu W., Yu HS. (eds) Proceedings of China-Europe Conference on Geotechnical Engineering. Springer Series in Geomechanics and Geoengineering. Springer, Cham. 2018.

5 **Dwivedia, J. P., Singha, V. P.** Radha Krishna Lalb, Sakshi Devia. Dynamic Response of Lined Circular Tunnel in Linear Viscoelastic Medium Due to Moving Ring load. [J.P. Dwivedia, V.P. Singha, Radha Krishna Lalb, Sakshi Devia. Dynamic Response of Lined Circular Tunnel in Linear Viscoelastic Medium Due to Moving Ring load.] – Materials Today: Proceedings Volume 4, Issue 2, Part A, 2017. – P. 3767-3775.

6 Shunhua Zhou. Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems. [Shunhua Zhou. Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems.] – Academic Press, 2019. – 276 p.

7 **Novaczki, V.** Teoriya uprugosti. [Novatsky V. Theory of elasticity.] – M. : Mir, 1975. – 872 p.

8 Guz' L.I., Kubenko V.D., Cherevko M.A. Difrakciya uprugix voln. [L. I. GUZ', V. D. Kubenko, M. A. Cherevko, Diffraction of elastic waves.] – Kiev : Naukova dumka, 1978. – 308 p.

9 **Timoshenko, S. P., Gud'er, Dzh.** Teoriya uprugosti. [Timoshenko S. P., Goodyear J. Theory of elasticity.] – M. : Nauka, 1979. – 560 p.

10 **Ivanov, E. A.** Difrakciya e'lektromagnitny'x voln na dvux telax [Ivanov E. A. Diffraction of electromagnetic waves on two bodies.] – Minsk : Nauka i texnika, 1968. – 584 p.

Материал постуил в редакцию 21.12.20.

М. И. Котова¹, В. Н. Украинаец², Е. М. Ыбыраева³

¹Математика және математикалық модельдеу институты,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ.;

^{2,3}Торайғыров университеті,
Қазақстан Республикасы, Павлодар қ.

Материал 21.12.20 баспаға түсті.

СЕРПІМДІ ЖАРТЫЛАЙ КЕҢІСТІКТІҢ ҚУЫСТЫҢ БЕТІ БОЙЫМЕН ҚОЗҒАЛАТЫН МЕРЗІМДІ ЖҮКТЕМЕГЕ РЕАКЦИЯСЫ

Әр түрлі дыбысқа дейінгі жылдамдықтары бар дөңгелек цилиндрлік қуыстың бетінде біркелкі қозғалатын мерзімді жүктеменің серпімді жартылай кеңістігіне әсер ету туралы кішігірім туннель үшін модельдік есеп зерттеледі. Жартылай кеңістіктің қозғалысы жылжымалы координаталар жүйесіндегі серпімділік теориясының динамикалық теңдеулерімен сипатталады, оларды шешу үшін айнымалыларды толық емес бөлу әдісі ұсынылады. Туннельдің шатырының құлауын, сондай-ақ беткі қабаттың әсерін болдырмау көрсетілген. Жердегі құрылыс ғимараттарына Рәлеев толқындарының жылдамдығы және соңғы резонанстық тербелістердің пайда болу мүмкіндігі, туннель арқылы тасымалданатын объектілердің жылдамдық режимі Рәлеев жылдамдығынан төмен болуы керек.

Кілтті сөздер: Серпімді жартылай кеңістік, серпімді жартылай кеңістік реакциясы, цилиндрлік қуыс, мерзімді жүктеме, кернеулі-деформацияланған күй, Рейле толқындары, таяз туннель, модельдік тапсырма.

M. I. Kotova¹, V. N. Ukrainets², Ye. M. Ibrayeva³

*¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
Republic of Kazakhstan, Almaty;*

^{2,3}Toraighyrov University,

Republic of Kazakhstan, Pavlodar.

ELASTIC SEMISPACED REACTION ON PERIODIC LOAD MOVING OVER INNER SURFACE OF CAVITY

The study in question is the model problem for shallow tunnels that investigates the influence on elastic half-space of periodic load moving uniformly along the surface of a circular cylindrical cavity with various subsonic velocities. The motion of the half space is described in the form of dynamic equations of the theory of elasticity in the moving coordinate system. To solve the equations we used the method of incomplete variables separation. It is shown that in order to avoid the collapse of the tunnel roof, the influence of surface Rayleigh waves on ground building structures and eventual formation in them of resonance oscillations, the speed rate for objects transported along the tunnel should be below the Rayleigh velocity.

Keywords: Elastic half-space, elastic half-space reaction, cylindrical cavity, periodic load, stress-strain state, Rayleigh waves, shallow tunnel, model problem.

Теруге 29.12.20. ж. жіберілді. Басуға 10.01.21. ж. қол қойылды.
Форматы 297*420/2. Кітап-журнал қағазы.
Шартты баспа табағы 6,04. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген З. С. Исакова
Корректор: А. Р. Омарова

Тапсырыс № 3721

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған
Торайғыров университеті
140008, Павлодар қ., Ломов көш., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы
Торайғыров университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
67-36-69

e-mail: kereku@psu.kz
www.vestnik.psu.kz
www.nitk.psu.kz